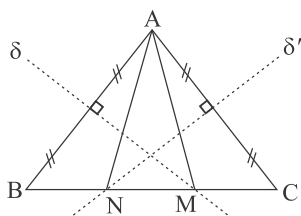




گزینه ۲

۱

$$\hat{A} = 180^\circ, AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 50^\circ$$



هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است، پس:

$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \Rightarrow \hat{BAM} = \hat{B} = 50^\circ \Rightarrow \hat{AMB} = 180^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \Rightarrow \hat{CAN} = \hat{C} = 50^\circ \Rightarrow \hat{ANC} = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{MAN} = 180^\circ - (\hat{AMB} + \hat{ANC}) = 20^\circ \end{cases}$$

بنابراین، کوچک ترین زاویه مثلث AMN، زاویه $\hat{MAN} = 20^\circ$ است.

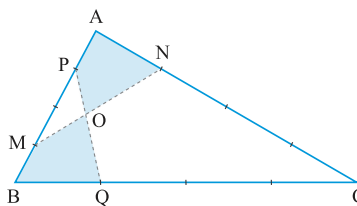
قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گزینه ۱

۲



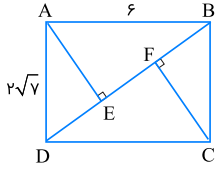
چون $\frac{AN}{AC} = \frac{BQ}{BC} = \frac{1}{4}$ ، پس طبق عکس قضیه تالس داریم $QN \parallel AB$. بنابراین فاصله نقاط N و Q از خط AB یکسان اند، یعنی ارتفاع دو مثلث AMN و PQB مساوی است و چون قاعده این دو مثلث یعنی AM و BP هر دو $\frac{3}{4}AB$ هستند، (چون AB به چهار قسمت مساوی تقسیم شده)، پس قاعده این دو مثلث هم مساوی است و بنابراین:

$$S(\triangle AMN) = S(\triangle PQB)$$

حال اگر از این دو مساحت، مساحت قسمت سفید رنگ یعنی مساحت مثلث MOP را حذف کنیم، مساحت دو قسمت رنگی باهم برابر می شوند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

از دو رأس A و C، دو عمود AE و CF را بر قطر BD رسم می‌کنیم.



$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 = 36 + 20 = 56 \Rightarrow BD = 8$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

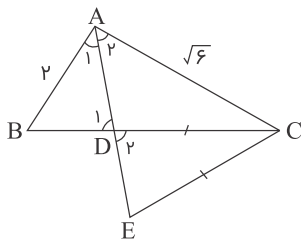
$$\triangle ABD : AD^2 = DE \cdot BD \Rightarrow 20 = DE \times 8 \Rightarrow DE = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

به طور مشابه $BF = \frac{3}{2}$ است و داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = 8 - 5 = 3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

طبق شکل داریم:



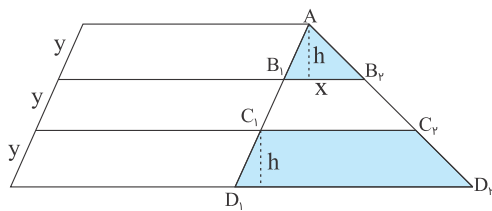
$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & AD \text{ نیمساز} \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 & \text{متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{DC=CE} \hat{D}_1 = \hat{E}$$

$$\xrightarrow{z.z} \triangle ABD \sim \triangle AEC \quad (k = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{\sqrt{6}})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AEC}} = k^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

فرض کنید $B_1B_2 = x$ باشد. در این صورت داریم:



$$\begin{aligned} \frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} &= \left(\frac{AB_1}{AB}\right)^2 = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow C_1C_2 = 2x \\ \frac{S_{AD_1D_2}}{S_{ADC}} &= \left(\frac{AD_1}{AD}\right)^2 = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{9} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow D_1D_2 = 3x \end{aligned}$$

$$\frac{S_{AB_1B_2}}{S_{C_1C_2D_2D_1}} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times h}{\frac{1}{2} (2x + 3x)h} = \frac{1}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

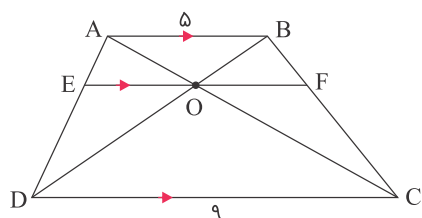
مطابق شکل و طبق فرض $\hat{E}_2 + \hat{C} = 180^\circ$ و چون $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180^\circ$ ، پس $\hat{E}_1 = \hat{C}$ و چون زاویه A در هر دو مثلث ABC و AED مشترک است، پس $\hat{D}_1 = \hat{B}$ و دو مثلث مذکور متشابه‌اند؛ و لذا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AD} &= \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{20}{12} \Rightarrow k = \frac{5}{3} \\ \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} &= \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{S_{ABC}}{S_{ABC} - S_{ADE}} = \frac{25}{25 - 9}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{\text{چهار ضلعی}}} = \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{S_{\text{چهار ضلعی}}}{S_{ABC}} = 0.64$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷



$$\begin{cases} \triangle ADC : EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{9} = \frac{AE}{AD} \\ \triangle DAB : EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{5} = \frac{DE}{AD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EO}{9} + \frac{EO}{5} = \frac{\overbrace{AE + DE}^{AD}}{AD} = 1 \xrightarrow{\times 45} 5EO + 9EO = 45$$

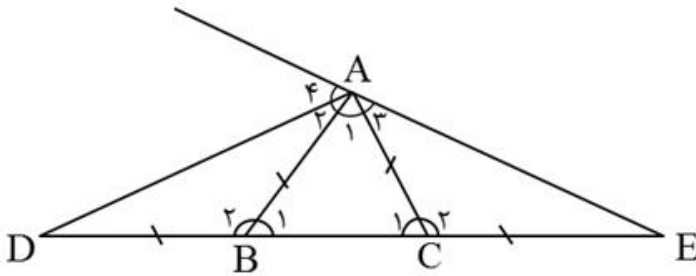
$$\Rightarrow 14EO = 45 \Rightarrow EO = \frac{45}{14}$$

$$\Rightarrow \text{به روش مشابه} \Rightarrow OF = \frac{45}{14} \Rightarrow EF = \frac{45}{14} + \frac{45}{14} = \frac{45}{7}$$

تذکر: در حالت کلی، O وسط EF است و $EF = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}}$. (طول EF واسطه توافقی طول قاعده‌ها است)

گام اول

الف) مثلث $\triangle ADE$ را بر اساس توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم:



ب) $AB = AC = CE = BD$

ج) کوچک‌ترین زاویه خارجی در هر مثلث، مکمل بزرگ‌ترین زاویه داخلی است.

گام دوم

مثلث $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ ، در نتیجه مکمل آن‌ها نیز برابر است؛ یعنی $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ است. از طرفی طبق قسمت (ب) از گام اول، $AB = AC$ و $CE = BD$ است؛ بنابراین دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle ACE$ به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} CE = BD \\ \hat{B}_2 = \hat{C}_2 \\ AB = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \triangle ABD \cong \triangle ACE$$

در نتیجه زوایای $\hat{D}$ و $\hat{E}$ باهم برابر و هردو زوایای کوچک داخلی مثلث $\triangle ADE$ محسوب می‌شوند.

$$\triangle ABD \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D} = \alpha \xrightarrow{\hat{D}=\hat{E}} \hat{D} = \hat{E} = \alpha$$

$\hat{A}_4$ کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث $\triangle ADE$ است پس اندازه آن با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر می‌شود:

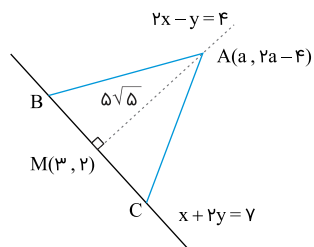
$$\hat{A}_4 = \hat{D} + \hat{E} = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث، ۲ برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است.

معادله خط عمود بر BC و گذرا از M را می‌نویسیم:

$$m_{AM} = \frac{-1}{m_{BC}} = 2$$

$$AM : y - 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 4$$

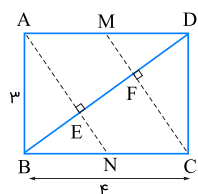


$$|AM| = 5\sqrt{5} \Rightarrow AM^2 = 125$$

$$(a - 3)^2 + (2a - 4 - 2)^2 = 125 \Rightarrow 5(a - 3)^2 = 125$$

$$(a - 3)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ a = -2 \end{cases}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:



$$\begin{aligned} \Delta ABD : BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ \Rightarrow BD^2 &= 9 + 16 = 25 \Rightarrow BD = 5 \end{aligned}$$

کاملاً واضح است که مثلث‌های ABN و CDM همنهشت‌اند، لذا $DF = EB$. همچنین ABD قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BE \times BD \Rightarrow 9 = BE \times 5 \Rightarrow BE = DF = \frac{9}{5} \\ \Rightarrow EF &= 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

همچنین در مثلث BFC داریم:

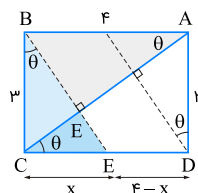
$$EN \parallel CF \xrightarrow{\text{قضیه تعمیم تالس}} \frac{BE}{BF} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{5} + \frac{7}{5}} = \frac{BN}{4} \Rightarrow BN = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow NC = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_{ANCM} = AB \times NC = 3 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4} = 5.25$$

راه حل دوم:

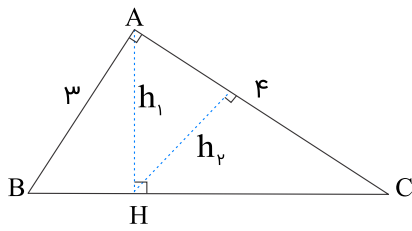
در شکل زیر تمام زوایای مشخص شده با یکدیگر برابرند که آن‌ها را θ می‌نامیم.



در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم $\tan \theta = \frac{3}{4}$ و همچنین در مثلث قائم‌الزاویه BCE داریم $\tan \theta = \frac{x}{3}$ ، در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$\begin{aligned} S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} &= \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = (4 - x) \times 3 = (4 - 2.25) \times 3 \\ &= 1.75 \times 3 = 5.25 \end{aligned}$$



$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

راه حل اول:

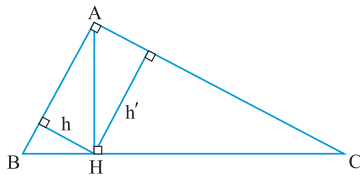
$$\begin{cases} \hat{C} \text{ مشترک} \\ \hat{AHC} = \hat{A} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AHC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

راه حل دوم:

$$\triangle ABC : \begin{cases} h_1 \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5h_1 = 3 \times 4 \Rightarrow h_1 = \frac{12}{5} \\ AC^2 = HC \times BC \Rightarrow 16 = 5HC \Rightarrow HC = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\triangle AHC : h_2 \times AC = h_1 \times HC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{4}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸



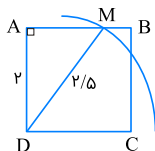
$$S_{\triangle ABC} = \frac{6}{\sqrt{5}} S_{\triangle ABH} \Rightarrow S_{\triangle ABH} + S_{\triangle ACH} = \frac{6}{\sqrt{5}} S_{\triangle ABH}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACH} = \frac{5}{\sqrt{5}} S_{\triangle ABH} \xrightarrow{\triangle ACH \sim \triangle ABH} \text{نسبت مساحت ها} = k^2 = \frac{5}{\sqrt{5}} \Rightarrow k = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{5}{12}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

مربع ABCD را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle DAM$ ، فاصله نقطه M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

$$AM^2 + 2^2 = (2/5)^2 \Rightarrow AM^2 + 4 = 4/25 \Rightarrow AM^2 = 2/25$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{2/25} = 1/5, \quad MB = 2 - 1/5 = 9/5$$

بنابراین فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $\frac{1}{5} = 0.2$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

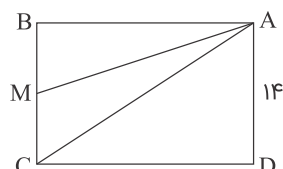
گام اول

الف) عرض مستطیل ۱۴ واحد و قطر آن ۲۵ واحد است.

$$\frac{S_{ABM}}{S_{AMCD}} = \frac{5}{9} \quad \text{ب)}$$

ج) $AM = ?$

گام دوم



با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \xrightarrow{AC=25, AD=14} 25^2 = 14^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow 625 = 196 + CD^2 \Rightarrow CD^2 = 625 - 196 = 429 \Rightarrow AB^2 = 429$$

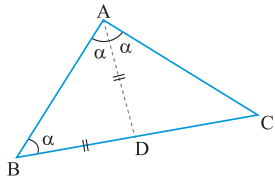
$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABM} + S_{AMCD}} = \frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times BM}{AB \times AD} = \frac{BM}{2AD} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{BM}{28} = \frac{5}{14} \Rightarrow BM = 10$$

رابطه فیثاغورس را برای مثلث $\triangle ABM$ نوشته و اندازه AM را تعیین می‌کنیم:

$$AB^2 + BM^2 = AM^2 \Rightarrow 429 + 100 = AM^2 \Rightarrow AM^2 = 529 \Rightarrow AM = \sqrt{529} = 23$$

مطابق شکل فرض می‌کنیم $\hat{B} = \alpha$ باشد، در این صورت $\hat{A} = 2\alpha$ ، پس با رسم نیمساز زاویه A ، این زاویه به دو قسمت تبدیل می‌شود که هرکدام با α برابر است. پس دو مثلث ABC و ADC به حالت تساوی دو زاویه ($\hat{D}AC = \hat{B} = \alpha$, $\hat{C} = \hat{C}$) باهم متشابه‌اند. با نوشتن نسبت تشابه داریم: (چون مثلث ABD متساوی‌الساقین است، پس $AD = BD$)



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} \xrightarrow{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}} \frac{BC}{AC} = \frac{AB + AC}{BD + DC}$$

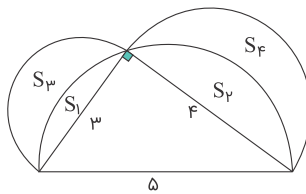
$$\xrightarrow{BD+DC=BC} \frac{a}{b} = \frac{c+b}{a} \Rightarrow a^2 = bc + b^2$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = bc$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

مساحت قسمت‌های مختلف شکل را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم. هدف ما محاسبه $S_3 + S_4$ است. با استفاده از قضیه فیثاغورس طول وتر مثلث برابر است با:

$$\text{وتر مثلث} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



داریم:

مساحت مثلث قائم‌الزاویه - مساحت نیم‌دایره به قطر ۵ $S_1 + S_2 = 5$

$$S_3 + S_4 = (\text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۳} + \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۴}) - (S_1 + S_2)$$

بنابراین:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{25}{4}\right) - 6 = \frac{25\pi}{8} - 6$$

$$S_3 + S_4 = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{25\pi}{8} - 6\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{9}{4}\right) + \frac{\pi}{2} (4) - \frac{25\pi}{8} + 6 = \frac{25\pi}{8} - \frac{25\pi}{8} + 6 = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) مثلث $\triangle MNC$ متساوی الساقین است، پس $\angle MNC = \angle MCN$.

ب) مثلث $\triangle ABM$ متساوی الساقین است، پس $\angle ABM = \angle BAM$.

ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

گام دوم

با توجه به گام اول، شکل را تکمیل می‌کنیم:

می‌دانیم $\hat{M}$ یک زاویه نیم‌صفحه است، داریم:

$$\angle AMB + \angle AMN + \angle MNC = x + 43^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ \quad (I)$$

ازطرفی:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM : \hat{B} + 2x = 180^\circ \\ \triangle CNM : \hat{C} + 2y = 180^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \hat{B} + 2x + \hat{C} + 2y = \hat{B} + \hat{C} + 2(x + y) = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{(I)} \hat{B} + \hat{C} + 274^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ - 274^\circ = 86^\circ$$

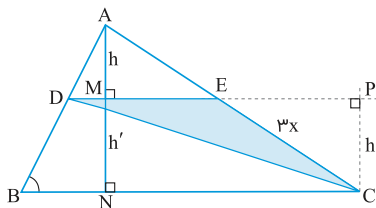
همچنین در مثلث $\triangle ABC$ داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow 86^\circ + \hat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \hat{BAC} = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

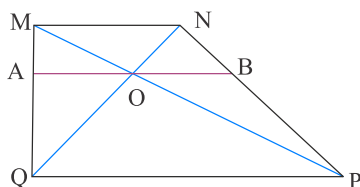
$$\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AD}{AB - AD} = \frac{3}{7 - 3}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{4}$$

ازطرفی نتیجه می‌گیریم $\frac{AE}{EC} = \frac{h}{h'}$ ، یعنی $\frac{h}{h'} = \frac{3}{4}$ چون مثلث‌های AME و ECP متشابه‌اند. پس:



$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{\frac{1}{2}DE \times h}{\frac{1}{2}DE \times h'} = \frac{h}{h'} = \frac{3}{4} = 75\%$$

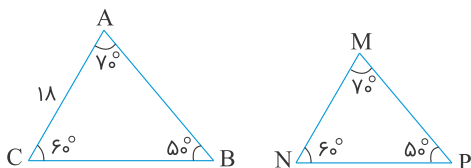


نکته: طبق قضیه تالس در دوزنقه داریم $\frac{AQ}{AM} = \frac{BP}{BN}$ ، سپس با ترکیب نسبت در مخرج نتیجه می‌گیریم: $\frac{AQ}{QM} = \frac{BP}{PN}$
 باتوجه به تعمیم قضیه تالس در دو مثلث QMN و PMN داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{OA}{MN} = \frac{AQ}{QM} \\ \frac{OB}{MN} = \frac{BP}{PN} \end{array} \right\} \div \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \underbrace{\frac{AQ}{QM} \times \frac{PN}{BP}}_1 \Rightarrow \frac{OA}{OB} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

در مثلث ABC داریم $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 60^\circ$ و در مثلث MNP داریم $\hat{P} = 180^\circ - (\hat{M} + \hat{N}) = 50^\circ$. پس دو مثلث ABC و MNP با داشتن زاویه‌های مساوی متشابه‌اند. با کمی دقت متوجه می‌شویم که در مثلث ABC ضلع AB روبه‌روی زاویه $\hat{C} = 60^\circ$ است و در مثلث MNP ضلع MP روبه‌روی زاویه $\hat{N} = 60^\circ$. پس این دو ضلع نظیر هم هستند. بنابراین:

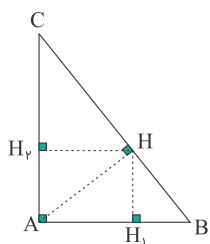


$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \left(\frac{AB}{MP}\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{4} = \left(\frac{18}{MP}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{18}{MP} \Rightarrow MP = 12$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند؛ یعنی مثلث‌های ABH و ACH باهم متشابه‌اند.



$$\frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC) - S(\triangle ABH)} = \frac{1}{5-1} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ACH)} = \frac{1}{4}$$

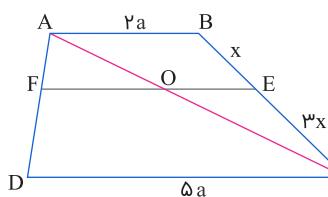
بنابراین نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{1}{4}$ و نسبت تشابه دو مثلث $\frac{1}{2}$ است. در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه

$$\frac{HH_1}{HH_2} = \frac{1}{2} \text{ است. در نتیجه داریم:}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

رأس A را به C وصل می‌کنیم:



$$\triangle ADC : \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{OF}{5a} \Rightarrow OF = \frac{5}{4}a$$

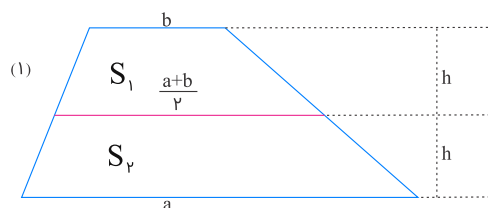
$$\triangle ABC : \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{a} \Rightarrow \frac{3x}{4x} = \frac{OE}{a} \Rightarrow OE = \frac{3}{4}a$$

$$EF = OF + OE = \frac{5}{4}a + \frac{3}{4}a = \frac{11}{4}a$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{\frac{11}{4}a}{5a} = \frac{11}{20}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{2}$ است.

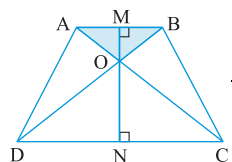


$$S_2 = 2S_1 \Rightarrow \frac{1}{2}h(a + \frac{a+b}{2}) = 2 \times \frac{1}{2}h(b + \frac{a+b}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{3a+b}{2} = 3b+a \Rightarrow 3a+b = 6b+2a \Rightarrow a = 3b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

مطابق شکل، $CD = 2AB$ است. همچنین طبق خطوط موازی و مورب می‌دانیم $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ پس نسبت ارتفاع با نسبت اضلاع نظیرشان برابرند، یعنی $\frac{ON}{OM} = \frac{DC}{AB} = 2$. بنابراین $\frac{ON+OM}{OM} = \frac{2+1}{1}$ ، یعنی $MN = 3OM$. حال داریم:



$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{\frac{AB+CD}{2} \times MN}{\frac{AB \times OM}{2}} = \frac{AB+CD}{AB} \times \frac{MN}{OM} = \frac{3AB}{AB} \times \frac{3OM}{OM} = 9$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

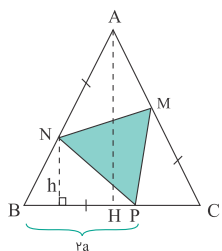
$$\text{نسبت مساحت‌ها کوچک به بزرگ} = k^2 = \frac{49}{128} \Rightarrow k = \frac{7}{8\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ضلع مثلث کوچک‌تر}}{\text{ضلع مثلث بزرگ‌تر}} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{21}{x} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow x = 24\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) اندازه هر یک از سه قسمت مشخص شده بر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر a و هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر $3a$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین در مثلث‌های رنگ‌نشده ارتفاع وارد بر ضلع‌های با اندازه $2a$ را h فرض می‌کنیم. (ب) اگر ارتفاع مثلث اصلی را رسم کنیم طبق قضیه تالس اندازه آن برابر $3h$ به دست می‌آید (چون ارتفاع دو مثلث ABC و BNP موازی‌اند پس $\frac{h}{AH} = \frac{a}{3a}$ در نتیجه $AH = 3h$). پس می‌توان اندازه مساحت مثلث رنگی و مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را برحسب a و h تعیین و در نهایت نسبت آن‌ها را محاسبه کنیم.



گام دوم

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3h \times 3a}{2} = \frac{9ha}{2}$$

$$S_{\triangle BNP} = \frac{1}{2} \times h \times 2a = ha$$

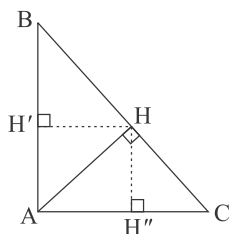
$$S_{\triangle MNP} = S_{\triangle ABC} - 3S_{\triangle BNP} = \frac{9ha}{2} - 3ha = \frac{3ha}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3ha}{2}}{\frac{9ha}{2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

گام اول

الف) مثلث $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است.

ب) با فرض اینکه $HC < HB$ باشد داریم: $S_{\triangle ABC} = 6/76 S_{\triangle AHC}$
 ج) $HH' = ?$ و $HH'' = ?$



گام دوم

سه مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AHC$ ، $\triangle AHB$ و $\triangle ABC$ باهم متشابه‌اند. می‌دانیم در مثلث‌های متشابه نسبت تشابه برابر جذر نسبت مساحت‌ها است.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHC}} = 6/76 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH} + S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle AHC}} = 6/76 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle AHC}} + 1 = 6/76 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle AHC}} = 5/76$$

همچنین می‌دانیم در مثلث‌های متشابه، نسبت تشابه با نسبت ارتفاع‌ها برابر است. چون دو مثلث $\triangle ABH$ و $\triangle ACH$ باهم متشابه‌اند، داریم:

$$\frac{HH'}{HH''} = \sqrt{5/76} = 2/4 \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{5}{12}$$

گام اول

الف) چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است پس داریم:

$$MN \parallel BP \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$NP \parallel MB \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow \triangle NPC \sim \triangle ABC$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

گام دوم

طبق گام اول، $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ است. با توجه به اینکه $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ ، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{MA}{AB} &= \frac{MA}{MA + MB} = \frac{1}{\frac{MA + MB}{MA}} = \frac{1}{1 + \frac{MA}{MB}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{4}{25} S_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

چون $MN \parallel BC$ است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle NPC \sim \triangle ABC$$

است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN + NC} = \frac{1}{\frac{AN + NC}{NC}} = \frac{1}{\frac{NC}{AN} + 1} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\triangle NPC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle NPC} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی الاضلاع $MNPB$ را برحسب مساحت مثلث $\triangle ABC$ می‌نویسیم. داریم:

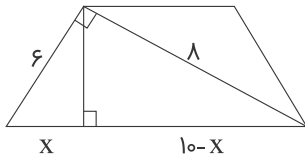
$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle AMN} + S_{\triangle NPC} + S_{MNPB} \\ \Rightarrow S_{\triangle ABC} &= \frac{4}{25} S_{\triangle ABC} + \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} + S_{MNPB} \\ \Rightarrow S_{MNPB} &= \frac{12}{25} S_{\triangle ABC} = \frac{48}{100} S_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

پس مساحت متوازی الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث $\triangle ABC$ است.

در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قائمه واسطه هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر است.

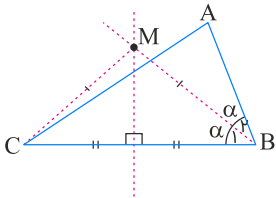
$$6^2 = 10x \Rightarrow x = 3/5$$

$$\text{طول قاعده کوچک} = 10 - 2x = 10 - 6/5 = 14/5$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

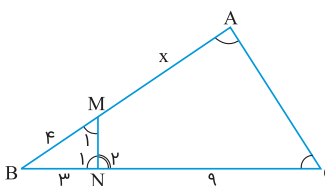
نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است، پس مثلث MBC متساوی الساقین است و داریم:



$$\widehat{MCB} = \widehat{MBC} = \frac{1}{2}\widehat{B} \xrightarrow{\widehat{MCB} > \widehat{ACB}} \frac{1}{2}\widehat{B} > \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{B} > 2\widehat{ACB}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

ابتدا ثابت می‌کنیم دو مثلث کوچک و بزرگ متشابه‌اند:



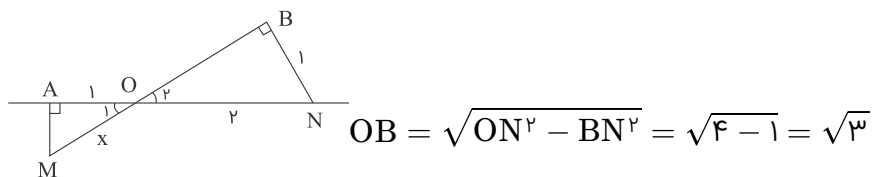
$$\begin{cases} \widehat{MNC} : \widehat{N}_2 + \widehat{A} = 180^\circ \\ \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{N}_1$$

بنابراین می‌توان گفت دو مثلث ABC و BMN متشابه‌اند (زیرا $\widehat{B} = \widehat{B}$ و $\widehat{A} = \widehat{N}_1$ و در نتیجه $\widehat{C} = \widehat{M}_1$)، پس:

$$\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BM} \Rightarrow \frac{x+4}{3} = \frac{3+9}{4} \Rightarrow x = 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OBN داریم:



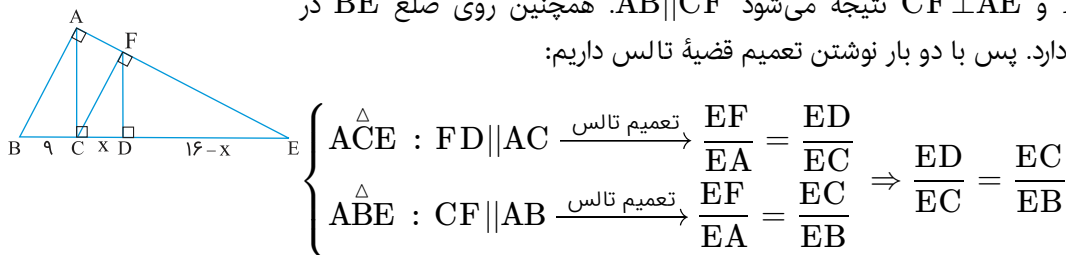
$$OB = \sqrt{ON^2 - BN^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

دو مثلث OAM و OBN به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$). داریم:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

مطابق شکل، از اینکه $AB \perp AE$ و $CF \perp AE$ نتیجه می‌شود $AB \parallel CF$. همچنین روی ضلع BE بزرگ‌ترین مثلث، چهار نقطه وجود دارد. پس با دو بار نوشتن تعمیم قضیه تالس داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle ACE : FD \parallel AC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EF}{EA} = \frac{ED}{EC} \\ \triangle ABE : CF \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EF}{EA} = \frac{EC}{EB} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{EC}{EB}$$

$$\Rightarrow EC^2 = ED \times EB \Rightarrow (16 - x + x)^2 = (16 - x)(16 - x + x + 9)$$

$$\Rightarrow 256 = (16 - x) \times 25 \Rightarrow x = 5/76$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است؛ بنابراین $MN \parallel PB$ است. با استفاده از قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$MN \parallel BP \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{7}{10}$$

همچنین $NO \parallel AM$ است پس دو مثلث $\triangle NOC$ و $\triangle AMC$ نیز متشابه می‌شود. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{49}{100} \Rightarrow S_{\triangle NOC} = \frac{49}{100} S_{\triangle AMC} \quad (I)$$

مساحت دو مثلث $\triangle AMC$ و $\triangle ABC$ را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{10} \Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{3}{10} S_{\triangle ABC} \quad (II)$$

با استفاده از دو رابطه (I) و (II) داریم:

$$S_{\triangle NOC} = \frac{49}{100} \times \frac{3}{10} S_{\triangle ABC} = \frac{147}{1000} S_{\triangle ABC} \quad (III)$$

از طرفی چون $MN \parallel BP$ است پس دو مثلث $\triangle AMN$ و $\triangle ABC$ متشابه می‌شود و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

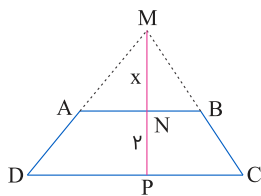
$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{9}{100} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{9}{100} S_{\triangle ABC} \quad (IV)$$

اکنون با استفاده از روابط (II) و (III) و (IV) داریم:

$$\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{S_{\triangle AMC} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{9}{100} - \frac{147}{1000}\right) S_{\triangle ABC}}{\frac{9}{100} S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{63}{1000}}{\frac{9}{100}} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10}$$

پس مساحت مثلث $\triangle OMN$ ، ۷۰ درصد مساحت مثلث $\triangle AMN$ است.

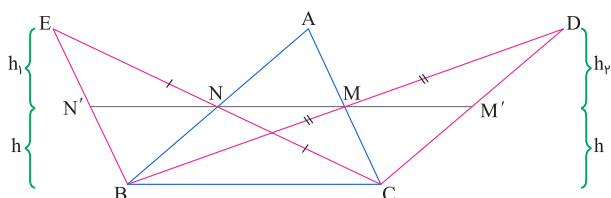
مطابق شکل، چون در مثلث MDC پاره خط AB موازی ضلع CD از این مثلث است، پس $\triangle MAB \sim \triangle MDC$.



بنابراین نسبت دو ضلع نظیر و موازی AB و CD از این دو مثلث، برابر نسبت ارتفاع نظیر این دو ضلع است، پس:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{x}{x+y} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow MP = 4 + 2 = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷



مثلث‌های DBC و EBC دارای قاعده‌های یکسان BC هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌ها است. پاره خط NM را از طرفین امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های DC و EB را قطع کند.

$$\triangle EBC : \frac{EN}{EC} = \frac{NN'}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_1}{h + h_1} \Rightarrow 2h_1 = h + h_1 \Rightarrow h_1 = h$$

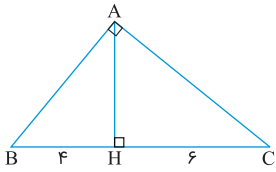
$$\triangle DBC : \frac{DM}{DB} = \frac{MM'}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_2}{h + h_2} \Rightarrow 2h_2 = h + h_2 \Rightarrow h_2 = h$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

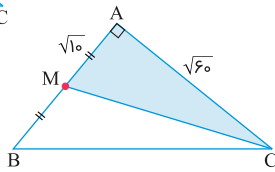
پس این دو مثلث ارتفاع‌های برابری دارند و مساحت آن‌ها باهم برابر است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

می‌دانیم در هر مثلث بزرگ‌ترین میانه نظیر کوچک‌ترین ضلع است یعنی از رأس روبروی آن ضلع به وسط آن ضلع می‌رسد.



در شکل فوق AB کوچک‌ترین ضلع مثلث ABC است:



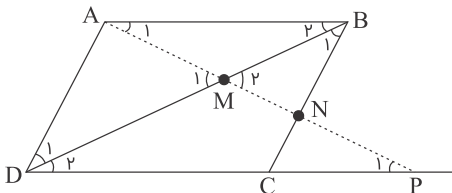
$$AB^2 = BH \times BC = 4(10) \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow AM = BM = \frac{AB}{2} = \sqrt{10}$$

$$AC^2 = CH \times BC = 6(10) \Rightarrow AC = \sqrt{60}$$

$$\Delta AMC : MC^2 = AC^2 + AM^2 = 60 + 10 \Rightarrow MC = \sqrt{70}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

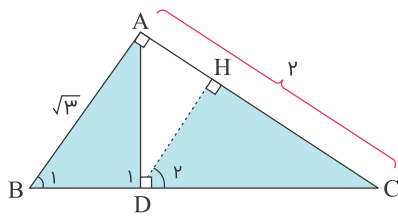


$$\left. \begin{aligned} \hat{D}_1 = \hat{B}_1, \hat{M}_1 = \hat{M}_2 &\Rightarrow \Delta AMD \sim \Delta MBN \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{AM}{MN} \\ \hat{A}_1 = \hat{P}_1, \hat{B}_2 = \hat{D}_2 &\Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta MDP \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MP}{AM} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{MP}{AM} \Rightarrow MN \times MP = AM^2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث $\triangle ABC$ داریم:



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow 3 + 4 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DH, \text{ مورب } BC \Rightarrow \widehat{D_2} = \widehat{B_1} \\ \widehat{D_1} = \widehat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle HCD$$

طبق روابط طولی در مثلث $\triangle ABC$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^2 = BC \times CD$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{7} \times CD \Rightarrow CD = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث HCD و ABD برابر است با:

$$K = \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

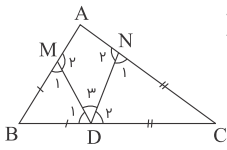
$$\frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ABD}} = K^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}} \right)^2 = \frac{16}{21}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BDN : AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM} \\ \triangle ACM : EN \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{CM} \end{array} \right\} \xrightarrow{BM=CM} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

گام اول

الف) شکل را با جزئیات بیشتر رسم می‌کنیم:



$$BM = BD \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{M}_1 = \alpha, \quad CN = CD \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{N}_1 = \beta$$

ب) $\hat{A} = 58^\circ$ است، بنابراین در مثلث $\triangle ABC$ داریم:

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=58^\circ} 58^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 122^\circ \quad (I) \end{aligned}$$

گام دوم

دو مثلث $\triangle CND$ و $\triangle BMD$ را در نظر گرفته و مجموع زوایای این دو مثلث را به دست می‌آوریم. مجموع زوایای این دو مثلث باید 360° باشد. با تعیین $\alpha + \beta$ اندازه $\hat{D}_3$ یا همان $\hat{MDN}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \triangle CND : \hat{C} + 2\beta &= 180^\circ \\ \triangle BMD : \hat{B} + 2\alpha &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} \hat{B} + \hat{C} + 2(\alpha + \beta) &= 360^\circ \\ \xrightarrow{(I)} 122^\circ + 2(\alpha + \beta) &= 360^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 122^\circ \\ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) &= 238^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{238^\circ}{2} = 119^\circ \quad (II) \end{aligned}$$

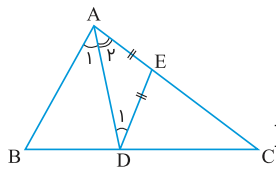
ازطرفی:

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{D}_3 &= 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \hat{MDN} = 180^\circ \\ \xrightarrow{(II)} 119^\circ + \hat{MDN} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{MDN} = 61^\circ \end{aligned}$$

طبق قضیه تالس می‌توان نوشت $(ME = x)$:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} BE \parallel AC &\Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ AB \parallel DC &\Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+7}{7} \Rightarrow x = 2/25 \\ \Rightarrow MD &= ME + AE + AD = 2/25 + 3 + 7 = 12/25 \end{aligned}$$

طبق فرض $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و طبق قضیه خطوط موازی و مورب از $DE \parallel AB$ و مورب بودن AD ، داریم $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ و لذا $\hat{A}_2 = \hat{D}_1$ و در مثلث متساوی الساقین ADE داریم $AE = DE$.

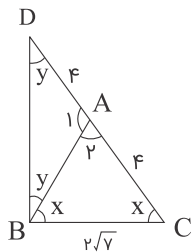


در نهایت با نوشتن تعمیم قضیه تالس برای مثلث ABC ، داریم:

$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{DE}{AB} \xrightarrow{DE=AE} \frac{EC}{AC} = \frac{AC - EC}{AB} \\ \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{20 - x}{12} \Rightarrow x = 12/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

ابتدا بر اساس توضیحات صورت سؤال، یک شکل دقیق رسم می‌کنیم:



مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ متساوی الساقین هستند پس:

$$\hat{ABC} = \hat{ACB} = x, \quad \hat{ABD} = \hat{ADB} = y$$

زاویه $\hat{A}_1$ زاویه خارجی مثلث $\triangle ABC$ است و اندازه آن برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش می‌شود؛ یعنی:

$$\hat{A}_1 = x + x = 2x$$

با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است، داریم:

$$\hat{A}_1 + y + y = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow 2(x + y) = 180^\circ \Rightarrow x + y = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

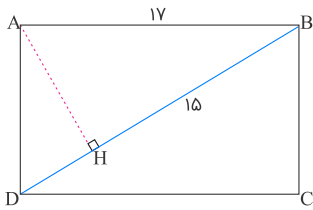
بنابراین مثلث $\triangle DBC$ در رأس B قائمه است و می‌توان اندازه ضلع BD را با استفاده از قضیه فیثاغورس محاسبه کرد.

$$CD = AD + AC = 4 + 4 = 8, \quad BC = 2\sqrt{7}$$

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 \Rightarrow 8^2 = BD^2 + (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow 64 = BD^2 + 28$$

$$\Rightarrow BD^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow BD = \sqrt{36} = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱



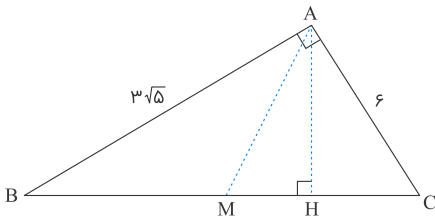
$$AB^2 = BH \times BD$$

$$17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17^2}{15}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{17^2}{15} - 19 = \frac{17^2 - 15 \times 19}{15} = \frac{289 - 285}{15} = \frac{4}{15}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{5})^2} = 9 \Rightarrow MC = MB = 4.5$$

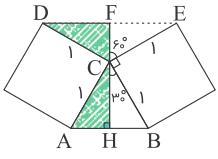
$$\triangle ABC : AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 45 = BH \times 9$$

$$\Rightarrow BH = 5 \Rightarrow HM = BH - MB = 5 - 4.5 = 0.5$$

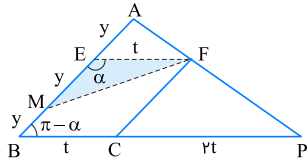
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHM}} = \frac{\frac{AH \times BC}{2}}{\frac{AH \times HM}{2}} = \frac{AH \times 9}{AH \times \frac{1}{2}} = 18$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

باتوجه به شکل واضح است که مثلث‌های ACH و CDF هم‌نهشت هستند؛ بنابراین مساحت مثلث ABC دو برابر مساحت مثلث DCF و مساوی با مساحت مثلث DCE است.



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳



$$PC = \frac{2}{3}PB \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{2}{3} = \frac{2t}{3t} \Rightarrow \begin{cases} PC = 2t \\ BC = t \end{cases}$$

$$EF \parallel BP \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BP} = \frac{t}{3t} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AE = y \\ AB = 3y \end{cases} \Rightarrow EB = 2y \Rightarrow EM = MB = y$$

نسبت مساحت دو مثلث را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_{EFM}}{S_{ABP}} = \frac{\frac{1}{2} \times EF \times EM \times \sin \alpha}{\frac{1}{2} \times AB \times BP \times \sin(\pi - \alpha)} = \frac{EF \times EM}{AB \times BP} = \frac{t \times y}{3t \times 3y} = \frac{1}{9}$$

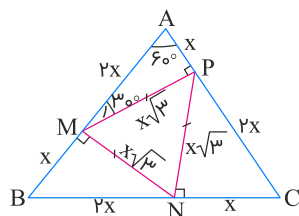
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

مطابق شکل، در مثلث قائم الزاویه AMP داریم:

$$\hat{M}_1 = 30^\circ \Rightarrow AP = \frac{1}{2}AM \Rightarrow AP = x, AM = 2x$$

$$\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow MP = \frac{\sqrt{3}}{2}AM = x\sqrt{3}$$

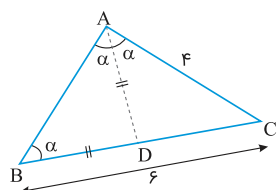
باتوجه به این که سه مثلث کناری، همنشأت‌اند، این روابط برای دو مثلث دیگر هم برقرار است.



حال چون دو مثلث ABC و MNP متشابه‌اند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. $(\sqrt{3})^2 = 3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

مطابق شکل با فرض $\hat{B} = \alpha$ داریم $\hat{A} = 2\hat{B} = 2\alpha$. پس با رسم نیمساز زاویه A، این زاویه به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود که هرکدام α است و داریم $AD = BD$. حال در دو مثلث ABC و ADC داریم:



$$\begin{cases} \hat{DAC} = \hat{B} = \alpha \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \hat{ADC} = \hat{A} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADC$$

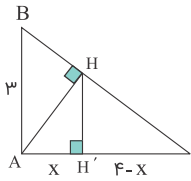
$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} \xrightarrow{AD=BD} \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{4}{DC} = \frac{6}{6} \Rightarrow DC = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow BD = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\text{حال طبق } \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \text{ داریم } \frac{AB}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{\frac{8}{3}} \text{ پس } AB = 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

شکل را به صورت زیر نام گذاری می کنیم و داریم:



$$AC = AH' + CH' = 4 - x + x = 4$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 9 + 16 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

اندازه AH را با استفاده از رابطه $AH \times BC = AB \times AC$ به دست می آوریم. سپس اندازه AH' یا همان x را با

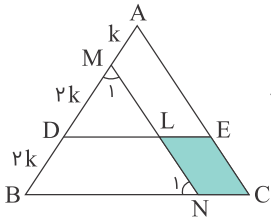
استفاده از رابطه $AH^2 = AH' \times AC$ در مثلث $\triangle AHC$ ، به دست می آوریم.

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5AH = 12 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$AH^2 = AH' \times AC \Rightarrow \frac{144}{25} = x \times 4 \Rightarrow x = \frac{144}{100} = 1/44$$

شکل را به صورت زیر نام گذاری می کنیم:

مثلث $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع است؛ بنابراین:



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

چون NLEC متوازی الاضلاع است، داریم:

$$MN \parallel AC \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A} = 60^\circ, \hat{N}_1 = \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \triangle MBN \text{ متساوی الاضلاع است} \Rightarrow BN = 4k$$

هر دو مثلث $\triangle MBN$ و $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع هستند در نتیجه با هم متشابه اند. می دانیم نسبت مساحت های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است؛ بنابراین:

$$\triangle MBN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{4k}{6k}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\triangle MBN} = \frac{4}{9} S_{\triangle ABC}$$

همچنین

$$DL \parallel BN \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} = 60^\circ, \hat{L} = \hat{N}_1 = 60^\circ \Rightarrow \triangle MDL \text{ متساوی الاضلاع است} \Rightarrow ML = 2k$$

به طریق مشابه ثابت می شود که $\triangle ADE$ نیز متساوی الاضلاع و $AE = 3k$ است؛ بنابراین دو مثلث $\triangle MDL$ و $\triangle MBN$ و دو مثلث $\triangle MDL$ و $\triangle ADE$ با هم متشابه اند و داریم:

$$\triangle MDL \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{S_{\triangle MDL}}{S_{\triangle MBN}} = \left(\frac{2k}{4k}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle MDL} = \frac{1}{4} S_{\triangle MBN} = \frac{1}{9} S_{\triangle ABC}$$

$$\triangle MDL \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{S_{\triangle MDL}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\frac{2k}{3k}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{9}{4} S_{\triangle MDL} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$$

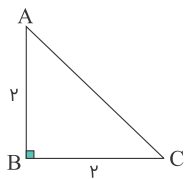
با استفاده از نسبت های بالا، نسبت خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$S_{AMLE} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle MDL} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} - \frac{1}{9} S_{\triangle ABC} = \frac{5}{36} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{LECN} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle MBN} + S_{AMLE}) = S_{\triangle ABC} - \left(\frac{4}{9} S_{\triangle ABC} + \frac{5}{36} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{1}{9} S_{\triangle ABC} = 11\% S_{\triangle ABC}$$

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع هاشورزده ۱۱ درصد مساحت مثلث $\triangle ABC$ است.

ابتدا مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین $\triangle ABC$ به ضلع قائم ۲ واحد را رسم می‌کنیم.



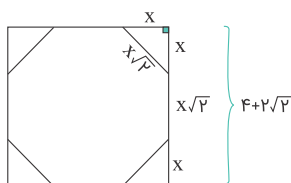
محیط این مثلث برابر طول ضلع یک مربع است. با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه ضلع AC و سپس محیط مثلث $\triangle ABC$ را محاسبه می‌کنیم.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle ABC \text{ محیط مثلث} = 2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

پس طول ضلع مربع موردنظر برابر $4 + 2\sqrt{2}$ است.

می‌خواهیم با حذف گوشه‌های این مربع، یک هشت ضلعی منتظم را درون آن محاط کنیم. اگر اندازه اضلاع قائمه چهار مثلث گوشه‌ای را x در نظر بگیریم، طول ضلع هشت ضلعی منتظم با استفاده از قضیه فیثاغورس برابر $x\sqrt{2}$ می‌شود.



باتوجه به اینکه طول ضلع مربع برابر $4 + 2\sqrt{2}$ است، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$x + x + x\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x + x\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 2$$

برای محاسبه مساحت هشت ضلعی منتظم، کافی است مساحت چهار مثلث گوشه‌ای را از مساحت مربع کم کنیم:

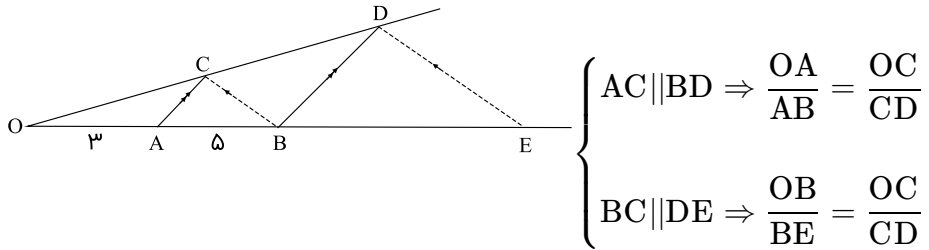
$$S_{\text{مربع}} = (4 + 2\sqrt{2})^2$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

پس مساحت هشت ضلعی برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - (4 \times S_{\text{مثلث}}) = (4 + 2\sqrt{2})^2 - 8 = 16 + 16\sqrt{2} + 8 - 8 = 16 + 16\sqrt{2}$$

باتوجه به شکل و با کمک قضیه تالس داریم:



طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{8}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

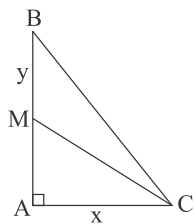
$$\triangle OCD \sim \triangle OEF \Rightarrow \frac{3}{OC} = \frac{y}{4} = \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ OC = 6 \end{cases}$$

$$\triangle OAB : \frac{y}{2x} = \frac{4}{x+4} \xrightarrow{y=2} \frac{2}{2x} = \frac{4}{x+4} \Rightarrow 4x = x+4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\triangle OAB : \frac{y}{2x} = \frac{OC}{OC+AC} \Rightarrow \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{6}{6+AC} \Rightarrow 6+AC = 8 \Rightarrow AC = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ را با فرض اینکه طول اضلاع قائمه‌اش x و y ($x < y$) باشد، رسم می‌کنیم. AB ضلع متوسط این مثلث و CM میانهٔ وارد بر آن است. هدف محاسبهٔ نسبت $\frac{CM}{AB}$ است.



مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر مساحت مربعی به طول ضلع x است؛ بنابراین:

$$\frac{xy}{2} = x^2 \Rightarrow xy = 2x^2 \xrightarrow{x, y > 0} y = 2x \Rightarrow AB = 2x$$

$$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(2x) = x$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\triangle AMC$ ، اندازهٔ CM را به دست می‌آوریم:

$$CM^2 = AM^2 + AC^2 \Rightarrow CM^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow CM = \sqrt{2}x$$

پس نسبت $\frac{CM}{AB}$ برابر است با:

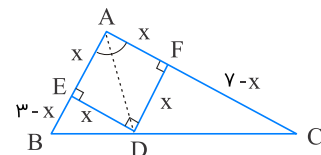
$$\frac{CM}{AB} = \frac{\sqrt{2}x}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

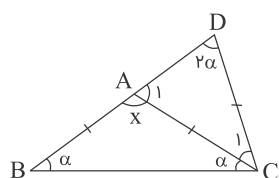
نقطهٔ D روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DE = DF$
 $\hat{A} = 90^\circ$ و $DE = DF$ ، بنابراین چهار ضلعی $AEDF$ مربع است. پس: $AE \parallel FD$
 طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC ، داریم:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y-x}{y} \Rightarrow yx = y^2 - xy \Rightarrow 10x = y^2 \Rightarrow x = y^2/10$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{2}x = y^2/10\sqrt{2}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵



$$\begin{cases} BD = BC \\ AB = AC = DC \end{cases}$$

زاویه خارجی $\hat{A}_1 = 2\alpha$

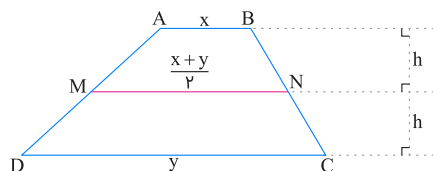
$$AC = DC \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_1 = 2\alpha, \quad BD = BC \Rightarrow \hat{D} = \hat{DCB} = 2\alpha \Rightarrow \hat{C}_1 = \alpha$$

$$\triangle ADC : \hat{A}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

$$\hat{x} = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

می‌دانیم در دوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است.
باتوجه به شکل و فرض سؤال، داریم:



$$\begin{aligned} \frac{S_{ABNM}}{S_{MNC D}} &= \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \left(x + \frac{x+y}{2} \right) (h)}{\frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{2} + y \right) (h)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{3x+y}{2}}{\frac{x+3y}{2}} = \frac{3}{5} \\ \Rightarrow \frac{3x+y}{x+3y} &= \frac{3}{5} \Rightarrow 15x + 5y = 3x + 9y \Rightarrow 12x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

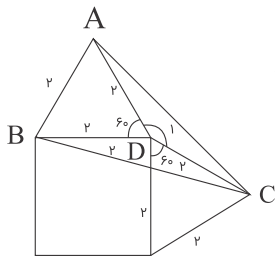
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

گام اول

الف) زوایای داخلی هر مثلث متساوی الاضلاع 60° است.

ب) مثلث $\triangle ADC$ یک مثلث متساوی الساقین است. اندازه زاویه $\hat{D}_1$ برابر است با:

$$\hat{D}_1 = 360 - (90 + 60 + 60) = 360 - 210 = 150^\circ$$



ج) برای به دست آوردن مساحت مثلث $\triangle ABC$ ، مساحت سه مثلث $\triangle ABD$ ، $\triangle ACD$ و $\triangle BDC$ را به دست آورده و باهم جمع می‌کنیم.

د) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a از رابطه $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$\triangle ADC \cong \triangle BDC \Rightarrow S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}$$

با استفاده از مبحث کاربرد مثلثات مساحت دو مثلث $\triangle ADC$ و $\triangle BDC$ را تعیین می‌کنیم:

$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

مثلث $\triangle ABD$ متساوی الاضلاع است و داریم:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$$

بنابراین مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDC} + S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABD} = 1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

در شکل داده شده دو زاویه متقابل به رأس و در نتیجه مساوی داریم، پس اگر دو مثلث متشابه باشند، باید اضلاع این زاویه‌های مساوی هم متناسب باشند. حال چون $12 < 9$ و $x - 2 < x$ ، پس اضلاع کوچک‌تر بر هم و اضلاع بزرگ‌تر نیز بر یکدیگر تقسیم می‌شوند.

$$\frac{9}{x-2} = \frac{12}{x} \Rightarrow 9x = 12x - 24 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = k^2 = \left(\frac{x-2}{9}\right)^2 \underset{x=8}{=} \frac{4}{9}$$

گام اول

الف) دو مثلث قابل انطباق نیستند یعنی دو مثلث باهم برابر یا همنهشت نیستند؛ بنابراین حق نداریم کوچکترین ضلع مثلث با اضلاع a و b و 3 را برابر 3 در نظر بگیریم (اگر کوچکترین ضلع مثلث اول را 3 در نظر بگیریم، با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند، نسبت تشابه آن‌ها برابر $1 = \frac{3}{3}$ می‌شود و باید مقدار a و b برابر 4 و 5 باشد که در این صورت دو مثلث برهم منطبق می‌شوند) پس کوچکترین ضلع این مثلث a یا b است.

ب) می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است.

گام دوم

محیط مثلث دوم برابر است با:

$$3 + 4 + 5 = 12$$

نسبت تشابه دو مثلث می‌تواند $\frac{3}{4}$ یا $\frac{3}{5}$ باشد. اگر نسبت تشابه برابر $\frac{3}{4}$ باشد، محیط مثلث اول برابر است با:

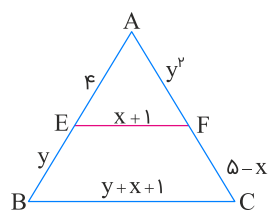
$$\text{محیط مثلث اول} = 12 \times \frac{3}{4} = 3 \times 3 = 9$$

و اگر نسبت تشابه برابر $\frac{3}{5}$ باشد، داریم:

$$\text{محیط مثلث اول} = 12 \times \frac{3}{5} = 7\frac{2}{5}$$

بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر ۹ است.

چون $EF \parallel BC$ ، طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

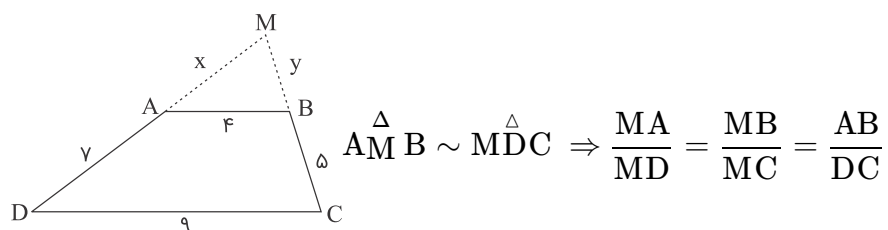


$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{x+1}{y+x+1} = \frac{4}{y+4} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{x+1}{y} = \frac{4}{y} \Rightarrow x+1=4 \Rightarrow x=3 \quad (*)$$

$$\text{تالس: } \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{(*)} \frac{4}{y} = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow y - 2x = 2 - 6 = -4$$

می‌دانیم در دوزنقه $ABCD$ ، دو قاعده AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.

بنابراین داریم:



$$\triangle AMB \sim \triangle MDC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

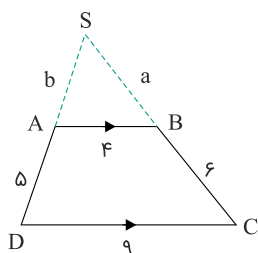
$$\Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 28 \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 20 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = 4 \end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\triangle AMB \text{ محیط} = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = 8 + \frac{28}{5} = \frac{40 + 28}{5} = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}$$

مطابق شکل، ساق‌های دوزنقه ABCD به طول اضلاع $AB = ۴$ ، $CD = ۹$ ، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+5} = \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9}$$

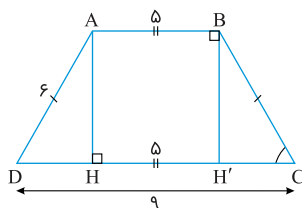
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9b = 4b + 20 \Rightarrow b = 4 \\ \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9a = 4a + 24 \Rightarrow a = 4/8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث SAB} = 4 + 4/8 + 4 = 12/8$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

مطابق شکل نصف تفاضل دو قاعده در دوزنقه متساوی الساقین عبارت است از دو مثلث قائم‌الزاویه.

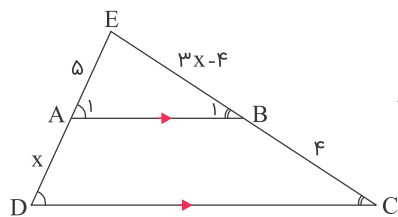


$$DH = \frac{9-5}{2} = 2 \Rightarrow \triangle ADH : AH = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{AB+CD}{2} \times AH = \frac{5+9}{2} \times 4\sqrt{2} = 28\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

طبق فرض، داریم:



$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{10}{3} \quad (*)$$

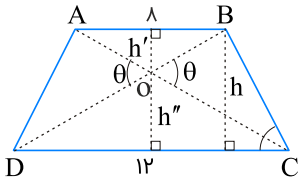
$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}, \hat{B}_1 = \hat{C} \Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle EDC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle EDC}} = \left(\frac{EA}{ED}\right)^2 = \left(\frac{5}{\underset{(*)}{\underset{\downarrow}{10 + \frac{10}{3}}}}\right)^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle EAB} = 9S, S_{\triangle EDC} = 25S \Rightarrow S_{ABCD} = 25S - 9S = 16S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle EAB}} = \frac{16S}{9S} = \frac{16}{9}$$

دو مثلث $\triangle OAB$ و $\triangle OCD$ باهم متشابه‌اند.



$$\frac{h'}{h''} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{h'}{h''} = \frac{\lambda}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow h'' = \frac{3}{2}h'$$

$$h' + h'' = 10 \Rightarrow h' + \frac{3}{2}h' = 10 \Rightarrow h' = 4 \Rightarrow h'' = 6$$

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OB \times OC = OA \times OD (*)$$

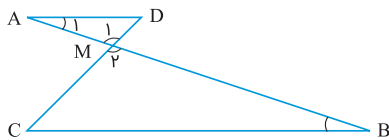
مساحت دو مثلث $\triangle OBC$ و $\triangle OAD$ باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases} S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OB \times OC \times \sin \theta \\ S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} OA \times OD \times \sin \theta \end{cases} \xrightarrow{(*)} S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ODC} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAD} \\ &\Rightarrow \frac{(\lambda + 12) \times 10}{2} = \frac{6 \times 12}{2} + \frac{4 \times \lambda}{2} + 2S_{\triangle OBC} \\ &\Rightarrow 100 = 36 + 16 + 2S_{\triangle OBC} \Rightarrow S_{\triangle OBC} = \frac{48}{2} = 24 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

مطابق شکل، دو مثلث AMD و MCB را از شکل بیرون می‌کشیم و ثابت می‌کنیم متشابه‌اند. توجه کنید که ضلع AB وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC است.



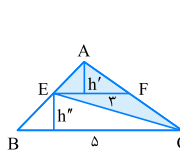
$$\triangle AMD, \triangle MCB : \begin{cases} AD \parallel BC, \text{ مورب } AB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ متقابل به رأس} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{D} = \hat{C} \Rightarrow \text{دو مثلث متشابه‌اند}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{MA}{AB - MA} = \frac{1}{1 + 1 + 1}$$

$$\xrightarrow{MA=x} \frac{x}{\sqrt{1^2 + 3^2} - x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳



$$\frac{EF}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{\frac{1}{2} \times 5 \times h''}{\frac{1}{2} \times (3+5) \times h''} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle BCFE}} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

نسبت تشابه: $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}}$

$$= \frac{S_{\triangle AEF}}{\frac{25}{9}S_{\triangle AEF} - S_{\triangle AEF}} = \frac{1}{\frac{25}{9} - 1} = \frac{1}{\frac{16}{9}} = \frac{9}{16}$$

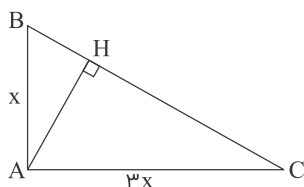
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle BCFE}} + \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{3}{8} + \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) طول اضلاع قائمه مثلث $\triangle ABC$ را x و $3x$ در نظر می‌گیریم.
 ب) می‌دانیم: "ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2}$ = مساحت مثلث"



گام دوم

با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه BC را محاسبه می‌کنیم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 10x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{10}x$$

با توجه به اینکه مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر ۶۰ واحد مربع است، مقدار x را تعیین می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} x(3x) = 60 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

می‌توان مساحت مثلث $\triangle ABC$ را با تعریف BC و AH به ترتیب به‌عنوان قاعده و ارتفاع آن چنین نوشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = 60$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2} AH \times \sqrt{10}(2\sqrt{10}) = 60 \Rightarrow 10AH = 60 \Rightarrow AH = 6$$

مطابق شکل داده شده در صورت مسئله، ثابت می‌کنیم دو مثلث EDC و ABC متشابه‌اند:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D}_1 \\ \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D}_2\hat{E}\hat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{14 + 2}{7} = \frac{BD + 7}{14} \Rightarrow BD = 25$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است.

گام دوم

با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند و $\frac{4}{7} \neq \frac{5}{9}$ و $\frac{5}{7} \neq \frac{4}{9}$ است، دو ضلع به طول‌های a و b از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند؛ بنابراین ضلع به طول a از مثلث اول یا با ضلع به طول ۷ از مثلث دوم متناظر است یا با ضلع به طول ۹. هریک از این دو حالت را بررسی و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: ضلع به طول a از مثلث اول با ضلع به طول ۹ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{9} = \frac{4}{7} = \frac{5}{b} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{5}{b} \Rightarrow a = \frac{45}{b} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{9} = \frac{4}{7} = \frac{5}{b} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{4}{7} \Rightarrow a = \frac{36}{7}$$

حالت دوم: ضلع به طول a از مثلث اول با ضلع به طول ۷ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{7} = \frac{4}{9} = \frac{5}{b} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{28}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{7} = \frac{5}{9} = \frac{4}{b} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{35}{9}$$

از بین مقادیر به دست آمده، بیشترین مقدار $a = \frac{45}{7}$ است.

$$\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{3}{5}, \frac{DA}{AB} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$$

چون AM میانه نظیر ضلع BC است، پس:

در دو مثلث ABM و AMD، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس M یکسان هستند، پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} = \frac{DA}{AB} = \frac{2}{5}$$

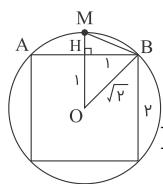
در دو مثلث ODM و ADM، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس D یکسان هستند؛ پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{OM}{AM} = \frac{DB}{AB} = \frac{3}{5}$$

با ضرب کردن سه رابطه فوق داریم:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} \times \frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} \times \frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{S_{ODM}}{S_{ABC}} = \frac{3}{25} = \frac{12}{100}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵



$$HB = 1, \quad MH = OM - OH$$

هدف محاسبه اندازه MB است. در مثلث قائم‌الزاویه MHB داریم:

برای محاسبه MH، ابتدا لازم است با استفاده از قضیه فیثاغورس شعاع دایره را به‌دست آوریم:

$$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow OM = OB = \sqrt{2} \Rightarrow MH = \sqrt{2} - 1$$

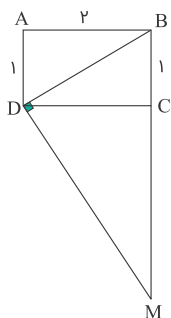
اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه MB را محاسبه می‌کنیم:

$$MB^2 = MH^2 + HB^2 \Rightarrow MB^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

راه حل اول: باتوجه به توضیحات صورت سؤال، شکلی ساده و دقیق رسم می‌کنیم:



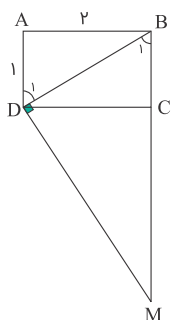
هدف محاسبه MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

با استفاده از رابطه طولی در مثلث BDM داریم:

$$BD^2 = MB \cdot BC \Rightarrow (\sqrt{5})^2 = MB \times 1 \Rightarrow MB = 5$$

راه حل دوم:



هدف محاسبه MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

دو مثلث قائم‌الزاویه $\triangle BAD$ و $\triangle BDM$ متشابه هستند، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{BDM} = 90^\circ \\ AD \parallel BC \\ \text{مورب BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BDM$$

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است بنابراین:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{MB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{MB} \Rightarrow MB = (\sqrt{5})^2 = 5$$

